

Wahrscheinlichkeit & Statistik

Serie 10

1. Ein grosses Kaufhaus möchte herausfinden, welcher Anteil seiner Kunden schon mindestens ein Mal Ladendiebstahl begangen hat. Dazu werden n Kunden anonym befragt. Da anzunehmen ist, dass trotz Anonymität viele Menschen dies nicht gerne zugeben, wird der Test folgendermassen modifiziert. Jeder der Befragten wirft (unabhängig von den anderen Befragten) geheim eine (faire) Münze und antwortet nur dann wahrheitsgetreu, falls die Münze Kopf zeigt. Wenn die Münze Zahl zeigt, antwortet der Befragte in jedem Fall mit "Nein". Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass eine typische Person mindestens einen Ladendiebstahl begangen hat. Ferner sei S_n die Anzahl der Nein-Antworten unter den n befragten Personen.
 - a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine unter den Befragten beliebig ausgewählte Person mit "Nein" antwortet?
 - b) Wie gross ist die mittlere Anzahl der Nein-Antworten bei $n = 1000$ Befragten?
 - c) Wir nehmen an, dass $p = 20\%$. Benutze ein Resultat aus der Vorlesung über Chernoff-Schranken, um eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass bei 1000 befragten Kunden mindestens 909 mit "Nein" antworten.
 - d) Berechne die Wahrscheinlichkeit aus c) approximativ.
2. Die erwartete Lebensdauer μ eines Batterietyps ist unbekannt und soll durch das arithmetische Mittel der Lebensdauern von n unabhängigen Testbatterien dieses Typs geschätzt werden. Erfahrungsgemäss ist die Standardabweichung der Lebensdauer ungefähr 5 Stunden. Wie gross muss n ungefähr sein, damit der Absolutbetrag der Differenz zwischen arithmetischem Mittel und μ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% höchstens 1 Stunde beträgt?

Tipp: Zentraler Grenzwertsatz.

3. Eine Brauerei verkauft einem Getränkeverteiler einen grossen Stock Bierfässer. Der Inhalt I jedes Fasses sei gegeben durch $I = 25X$ Liter, wobei die Zufallsvariable $X \sim \text{Beta}(a = 100, b = 2)$ verteilt ist. Die Dichte von X ist demzufolge gegeben durch

$$f(x) = cx^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

mit Parametern $a = 100$, $b = 2$ und Normierungskonstante $c = 10100$. (Beachte, dass X nur Werte im Bereich $[0, 1]$ annehmen kann.) Weiter sind die Inhalte der Fässer unabhängig voneinander.

- a) Wieviele Liter Bier sind in 120 Fässern mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% mindestens enthalten? Rechne mit einer geeigneten Approximation.

Ein Teil der Fässer ist nicht gut verschlossen, und während der Lagerung wird das enthaltene Bier schlecht. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fass unabhängig von den anderen und unabhängig vom Inhalt nicht gut verschlossen ist, sei 2%.

- b) Wieviele Liter gutes Bier kann der Getränkeverteiler erwarten, wenn er 120 Fässer kauft? Mit welcher Varianz und Standardabweichung?
- c) Wieviele Fässer soll der Getränkeverteiler kaufen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% mindestens 3000 Liter gutes Bier zu haben? Es genügt, die Ungleichung für die Anzahl Fässer anzugeben.

4. Welche der untenstehenden Aussagen sind **richtig**? Pro Aufgabe ist genau eine Aussage richtig.

- a) Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 6x^{-7} & \text{für } x \geq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ferner sei $Y = \log X$. Dann gilt:

1. Y ist exponentialverteilt mit Parameter 7.
2. Y ist exponentialverteilt mit Parameter 6.
3. Weder 1. noch 2. trifft zu.

- b) Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen, die alle den gleichen Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und die gleiche Varianz $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$ haben. Sei $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Dann gilt:

1. \bar{X}_n konvergiert für $n \rightarrow \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen $\mu = E[X_i]$.
2. \bar{X}_n konvergiert für $n \rightarrow \infty$ P -fastsicher gegen $\mu = E[X_i]$.
3. Im Allgemeinen gilt weder 1. noch 2.

- c) Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F . Dann ist die Verteilungsfunktion F_X von $X := \max(X_1, \dots, X_n)$

1. $F_X(x) = (1 - F(x))^n$.
2. $F_X(x) = 1 - F(x)^n$.
3. $F_X(x) = F(x)^n$.

d) Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit Erwartungswert $E[X_i] = \mu$ und Varianz $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$. Sei $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$; dann gilt für grosse n

1. $S_n \stackrel{\text{approx.}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.
2. $S_n \stackrel{\text{approx.}}{\sim} \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$.
3. $S_n \stackrel{\text{approx.}}{\sim} \mathcal{N}(n\mu, \sqrt{n}\sigma^2)$.

e) Sei Z eine Zufallsvariable mit endlicher Varianz. Für jedes $b > 0$ gilt dann $P[(Z - E[Z])^2 \geq b] \leq \frac{\text{var}[Z]}{b}$.

1. Die Aussage ist richtig.
2. Die Aussage ist falsch.
3. Die Aussage ist nur dann richtig, wenn zusätzlich $E[Z] = 0$ gilt.